

man mittels der Festsetzung

$$\delta\mu(\mathbf{s}) = -\frac{n(\mathbf{s})}{(2\pi)^3} P \int d^3\mathbf{k} \frac{|v(\mathbf{l}-\mathbf{k})|^2}{\eta(\mathbf{k},\mathbf{s})}. \quad (\text{A. 28})$$

Hier bedeutet  $\mathbf{l}$  [ursprünglich  $m \mathbf{v}_e(\mathbf{s}, \mathbf{r}')$ ] einen Impuls auf der (lokalen) FERMI-Kugel. Es bleibt mit der Definition Gl. (18) des Streuquerschnitts

$$\bar{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{i}{2} \operatorname{sign} \omega \int d^3\mathbf{s} G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{s}) n(\mathbf{s}) v(\mathbf{s}) \sigma(\mathbf{s}) \bar{G}_\omega(\mathbf{s}, \mathbf{r}'). \quad (\text{A. 29})$$

Wendet man hierauf den Operator  $[i\omega + \Delta/(2m) - V(\mathbf{r}) + \mu]$  an und beachtet Gl. (A. 1) mit  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv 0$ , so folgt

$$\left[ i \left( \omega + \frac{n(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r})}{2} \operatorname{sign} \omega \right) + \frac{1}{2m} \Delta - V(\mathbf{r}) + \mu \right] \bar{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{A. 30})$$

Berechnet man hieraus  $\bar{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  in quasiklassischer Näherung, so ist nur in Gl. (56) die Ersetzung  $|\omega| \rightarrow |\omega| + n(s)v(s)\sigma(s)/2$  vorzunehmen; damit folgt sofort Gl. (63). Die beiden Annahmen Gl. (A. 25) und (A. 27) lassen sich nun leicht rechtfertigen: Gl. (A. 27) ist eine unmittelbare Folge von Gl. (63), während sich Gl. (A. 25) in bekannter Weise daraus ergibt, daß Gl. (63) für kleine Abstände  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  in die GREENSche Funktion für den homogenen Leiter übergeht.

In Gegenwart eines Magnetfeldes gilt Gl. (48) mit  $\bar{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  gemäß Gl. (63); falls die magnetische Bahnkrümmung eine Rolle spielt, sind dabei in Gl. (63) unter der Wurzel  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  zu vertauschen. Zum Beweis von Gl. (48) geht man aus von Gl. (37) mit  $G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  nach Gl. (56) und ersetzt in Gl. (A. 25) im Exponenten  $\mathbf{k}$  durch  $(\mathbf{k} - e\mathbf{A}(\mathbf{s}))$  und in Gl. (A. 27)  $m \mathbf{v}_e(\mathbf{s}, \mathbf{r}')$  durch  $(m \mathbf{v}_e(\mathbf{s}, \mathbf{r}') - e\mathbf{A}(\mathbf{s}))$ .

## Zum Skin-Effekt zeitlich periodischer elektromagnetischer Felder unter Berücksichtigung der magnetischen Widerstandsänderung

JOACHIM SEEBASS

Institut für Elektrophysik der Technischen Hochschule Braunschweig

(Z. Naturforsch. 21 a, 1436–1443 [1966]; eingegangen am 23. April 1966)

Magnetoresistance leads to a change of the normal skin-effect. The electromagnetic field, periodic in time, is calculated by a successive approximation method for a half-space, the electric conductivity of which is dependent quadratically on the magnetic field. As expected results show the existence of uneven harmonics. Compared with the case without magnetoresistance, the a-c-resistance of some part of the half-space is altered by additional terms, which are dependent on the intensity of the current. Analogous results are given for a planar conducting layer of constant thickness.

Bei der Behandlung quasistationärer elektromagnetischer Vorgänge, wie z. B. Wirbelstrom und Skin-Effekt, sieht man die elektrische Leitfähigkeit im allgemeinen als feldstärkeunabhängige Materialgröße an. Tatsächlich weisen aber praktisch alle Materialien – mehr oder weniger ausgeprägt – eine Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von der im Material herrschenden magnetischen Feldstärke auf. Dabei spielt es keine Rolle, ob diese magnetische Feldstärke durch ein äußeres Magnetfeld oder durch in dem Material fließende Ströme verursacht wird; die magnetische Widerstandsände-

rung wird also die Erscheinungen des Skin-Effektes gegenüber dem Fall konstanter elektrischer Leitfähigkeit modifizieren. Für eine exakte theoretische Behandlung dieses Problems müßte man das gekoppelte System aus MAXWELLSchen Gleichungen und BOLTZMANN-Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \dot{\mathbf{H}}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{I}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}_r f - \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mu \mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot \operatorname{grad}_r f = -\frac{f - f_0}{\tau} \quad (3)$$



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

lösen, wobei sich die elektrische Stromdichte aus der Verteilungsfunktion  $f$  gemäß

$$\mathbf{I} = -e \int \mathbf{v} f \, d\tau \, v \quad (4)$$

berechnet.

Es läßt sich jedoch zeigen, daß unter gewissen einschränkenden Bedingungen aus der BOLTZMANN-GL. (3) und der Beziehung (4) ein lokales OHMSCHES Gesetz

$$\mathbf{I} = \sigma(\mathbf{H}) \mathbf{E} \quad (5)$$

folgt. Im folgenden sei die Zulässigkeit dieser Beziehung angenommen. Unter der gleichen Annahme hat KLEIN<sup>1</sup> das Eindringen eines zur Zeit  $t = 0$  eingeschalteten Magnetfeldes in einen leitenden Halbraum untersucht und auch einen Ausdruck für die dabei entwickelte JOULESche Wärme angegeben.

In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten eines zeitlich periodischen elektromagnetischen Feldes in einem leitenden Halbraum untersucht, dessen elektrische Leitfähigkeit gemäß

$$\sigma = \sigma_0 / (1 + b H^2) \quad (6)$$

( $\sigma_0$ ,  $b$  = Konstanten,  $H^2$  = Quadrat der magnetischen Feldstärke) von der Feldstärke abhängt. Die Rechnungen lassen sich auch für eine unendlich ausgedehnte, ebene Leiterschicht konstanter Dicke  $2\delta$  durchführen. Für diesen Fall werden hier aber nur die Ergebnisse mitgeteilt.

## 1. Die Differentialgleichung für die magnetische Feldstärke

Wir betrachten also die folgende Anordnung: Der Halbraum  $x \geq 0$  bestehe aus einem Material, dessen elektrische Leitfähigkeit durch (6) gegeben ist. In der Grenzfläche  $x = 0$  herrsche das Magnetfeld

$$H_z = H_0 \cos \omega t. \quad (7)$$

Untersucht werden soll der räumliche und zeitliche Verlauf des elektromagnetischen Feldes in dem leitenden Halbraum. Die MAXWELLSchen Gln. (1) und (2) reduzieren sich in diesem Fall unter Berücksichtigung von (5) auf

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (8)$$

$$\text{und} \quad -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \sigma(H_z) E_y. \quad (9)$$

Aus diesen Gleichungen gewinnt man durch Differenzieren und geeignetes Substituieren die folgende Differentialgleichung für  $H_z$ :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\sigma(H_z)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \mu \sigma(H_z) \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Eine Differentialgleichung, die nur  $E_y$  enthält, läßt sich aus (8) und (9) nicht herleiten. Wir befassen uns daher im folgenden nur mit der Lösung von (10) und bestimmen dann das zugehörige  $E_y$  aus (8) oder (9). Für den speziellen Leitfähigkeitsverlauf nach (6) geht die Gl. (10) über in

$$[1 + b H_z^2] \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + 2 b H_z \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)^2 - \mu \sigma_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Wir setzen jetzt

$$H_z = H_0 \cdot h(x, t). \quad (12)$$

Ferner führen wir die Skin-Eindringtiefe

$$d = \sqrt{2/\omega \mu \sigma_0}, \quad (13)$$

sowie die dimensionslose Ortskoordinate

$$\xi = x/d \quad (14)$$

und die dimensionslose Zeitkoordinate

$$\tau = \omega t \quad (15)$$

ein. Dann ergibt sich für  $h(\xi, \tau)$  die Differentialgleichung

$$[1 + \beta h^2(\xi, \tau)] \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + 2 \beta h(\xi, \tau) \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 - 2 \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0. \quad (16)$$

Hier wurde noch die Abkürzung

$$\beta = b H_0^2 \quad (17)$$

eingeführt. Gl. (16) ist zu lösen unter der Randbedingung

$$h(0, \tau) = \cos \tau. \quad (18)$$

## 2. Lösung der Differentialgleichung durch sukzessive Approximation

Gl. (16) ist eine nichtlineare, partielle Differentialgleichung. Eine exakte Lösung läßt sich nicht angeben. Wir beschränken uns daher auf den Fall

$$\beta = b H_0^2 \ll 1,$$

für den wir eine Näherungslösung berechnen wollen. Dazu machen wir den Ansatz

$$h(\xi, \tau) = h_0(\xi, \tau) + \beta h_1(\xi, \tau) + \beta^2 h_2(\xi, \tau) + \dots \quad (19)$$

<sup>1</sup> R. KLEIN, Z. Naturforschg. **19 a**, 1273 [1964].

Mit diesem Ansatz gehen wir in die Dgl. (16) und führen einen Koeffizientenvergleich für den Entwicklungsparameter  $\beta$  durch. Auf diese Weise gewinnen wir das folgende unendliche System linearer, partieller Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_0}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial h_0}{\partial \tau} &= 0, \\ \frac{\partial^2 h_1}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial h_1}{\partial \tau} &= - \left[ h_0^2 \frac{\partial^2 h_0}{\partial \xi^2} + 2 h_0 \left( \frac{\partial h_0}{\partial \xi} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial^2 h_2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial h_2}{\partial \tau} &= - \left[ h_0^2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial \xi^2} + 2 h_0 h_1 \frac{\partial^2 h_0}{\partial \xi^2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( 2 h_0 \frac{\partial h_0}{\partial \xi} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + h_1 \left( \frac{\partial h_0}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right], \\ \frac{\partial^2 h_3}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial h_3}{\partial \tau} &= - \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (20)$$

Dieses System lässt sich – wenigstens prinzipiell – sukzessiv lösen; d. h., – Konvergenz des Verfahrens vorausgesetzt –, man kann so zu einer Lösung der nichtlinearen Dgl. (16) kommen. Die einzelnen Partiallösungen von (20) sind noch gewissen Randbedingungen zu unterwerfen, die wir in folgender Weise wählen:

$$h_0(0, \tau) = \cos \tau, \quad (21)$$

$$h_i(0, \tau) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots. \quad (22)$$

Auf diese Weise wird die Bedingung (18) sicher erfüllt.

### 3. Berechnung von $h(\xi, \tau)$ bis zur 2. Näherung einschließlich

Da wir uns hier nur für zeitlich periodische Lösungen interessieren, machen wir für  $h_0(\xi, \tau)$  den Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial h_2}{\partial \tau} &= - \frac{1}{8} \operatorname{Re} \left\{ \left[ - \frac{223+107j}{5} e^{-(5+j)\xi} + \frac{4\sqrt{3}-j}{2} e^{-(2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})j)\xi} + \frac{126+107j}{10} e^{-(3+j)\xi} \right] e^{j\tau} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{138+331j}{10} e^{-(5+3j)\xi} - (2+2\sqrt{3}+(3+2\sqrt{3})j) e^{-(2+\sqrt{3}+\sqrt{3}j)\xi} + \frac{9(2-11j)}{10} e^{-3(1+j)\xi} \right] e^{3j\tau} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} j \left[ (7+4\sqrt{3}) e^{-(2+\sqrt{3})(1+j)\xi} - 25 e^{-5(1+j)\xi} \right] e^{5j\tau}. \end{aligned} \quad (29)$$

Durch den Ansatz

$$h_2(\xi, \tau) = \operatorname{Re} \{ h_{2,1}(\xi) e^{j\tau} + h_{2,3}(\xi) e^{3j\tau} + h_{2,5}(\xi) e^{5j\tau} \}$$

zerfällt (29) in drei gewöhnliche Differentialgleichungen. Es seien hier nur die den Randbedingungen angepaßten Lösungen dieser Gleichungen angegeben:

$$\begin{aligned} h_{2,1}(\xi) &= \frac{1}{64} \left[ \frac{388+49j}{25} e^{-(5+j)\xi} - \frac{25+2\sqrt{3}j}{13} e^{-(2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})j)\xi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{359+88j}{25} e^{-(3+j)\xi} + \frac{248+(507+50\sqrt{3})j}{25 \cdot 13} e^{-(1+j)\xi} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} h_0(\xi, \tau) &= \operatorname{Re} \{ h_0(\xi) e^{j\tau} \} \\ &= \frac{1}{2} [ h_0(\xi) e^{j\tau} + h_0^*(\xi) e^{-j\tau} ]. \end{aligned} \quad (23)$$

Damit ergibt sich aus der ersten Gleichung des Systems (20) für  $h_0$

$$\frac{d^2 h_0}{d\xi^2} - 2j h_0 = 0. \quad (24)$$

Die Lösung von (24), die zusammen mit dem Zeitfaktor die Randbedingung (21) erfüllt, ist

$$h_0 = e^{-(1+j)\xi}. \quad (25)$$

Das ist aber genau die bekannte Lösung für den normalen Skin-Effekt in einem Halbraum mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit. Wenn man nun in der zweiten Gleichung des Systems (20) sämtliche Terme der rechten Seite in der Phasorschreibweise (23) darstellt und dann die Lösung (25) einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_1}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial h_1}{\partial \tau} &= - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ 3j e^{-3(1+j)\xi} \cdot e^{3j\tau} \\ &\quad + (4+3j) e^{-(3+j)\xi} \cdot e^{j\tau} \}. \end{aligned} \quad (26)$$

Mit dem Ansatz

$$h_1(\xi, \tau) = \operatorname{Re} \{ h_{1,1}(\xi) e^{j\tau} + h_{1,3}(\xi) e^{3j\tau} \}$$

zerfällt (26) in die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_{1,1}}{d\xi^2} - 2j h_{1,1} &= - \frac{1}{2} (4+3j) e^{-(3+j)\xi}, \\ \frac{d^2 h_{1,3}}{d\xi^2} - 6j h_{1,3} &= - \frac{3}{2} j e^{-3(1+j)\xi}. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen, die die Randbedingungen bei  $\xi = 0$  erfüllen, sind

$$h_{1,1} = \frac{11+2j}{40} [ e^{-(1+j)\xi} - e^{-(3+j)\xi} ] \quad (27)$$

$$\text{und } h_{1,3} = \frac{1}{8} [ e^{-\sqrt{3}(1+j)\xi} - e^{-3(1+j)\xi} ]. \quad (28)$$

In analoger Weise erhält man für die dritte Gleichung des Systems (20) die Darstellung

$$h_{2,3}(\xi) = \frac{1}{32} \left[ \frac{1269+48j}{260} e^{-(5+3j)\xi} - \frac{56+21\sqrt{3}+(3+15\sqrt{3})j}{37} e^{-(2+\sqrt{3}+j)\xi} \right. \\ \left. - \frac{3(11+2j)}{10} e^{-3(1+j)\xi} + \frac{-647+5460\sqrt{3}+(-2624+3900\sqrt{3})j}{260 \cdot 37} e^{-\sqrt{3}(1+j)\xi} \right], \quad (31)$$

$$h_{2,5}(\xi) = \frac{1}{64} \left[ \frac{5}{2} e^{-5(1+j)\xi} - \frac{17+10\sqrt{3}}{11} e^{-(2+\sqrt{3})(1+j)\xi} + \frac{20\sqrt{3}-21}{22} e^{-\sqrt{3}(1+j)\xi} \right]. \quad (32)$$

Weitere Schritte der sukzessiven Approximation sollen hier nicht durchgeführt werden. Man sieht an den bisherigen Ergebnissen deutlich, daß mit zunehmender Ordnungszahl der Näherung immer mehr Oberwellen, deren Frequenzen ungeradzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind, auftreten. (Das ist auf Grund der Nichtlinearität durchaus zu erwarten.) Diese Oberwellen breiten sich zum Teil mit einer größeren Geschwindigkeit als die der Grundwelle in dem leitenden Halbraum aus. Die magnetische Widerstandsänderung wirkt sich also auch im Falle zeitlich periodischer Felder dahingehend aus, daß die Felder schneller in das leitende Material eindringen. (Siehe auch <sup>1)</sup>!) Die reellen Funktionen  $h_0$  und  $h_1$  lauten

$$h_0(\xi, \tau) = e^{-\xi} \cos(\tau - \xi), \quad (33)$$

$$h_1(\xi, \tau) = 0,558 e^{-2\xi} \sinh \xi \cdot \cos(\tau - \xi + \varphi_1) + 0,125 [e^{-\sqrt{3}\xi} \cos(3\tau - \sqrt{3}\xi) - e^{-3\xi} \cos(3\tau - 3\xi)], \quad (34)$$

mit

$$\varphi_1 = \operatorname{arc tg}(2/11).$$

In Abb. 1 ist die Funktion  $h_1(\xi, \tau)$  als Funktion von  $\xi$  mit  $\tau$  als Parameter aufgetragen. In Abb. 2 ist die Funktion  $h_0(\xi, \tau) + \beta h_1(\xi, \tau)$  mit  $\beta = 0,4$  dargestellt. Die gestrichelten Kurven geben den Verlauf des Magnetfeldes ohne Berücksichtigung der magnetischen Widerstandsänderung an.

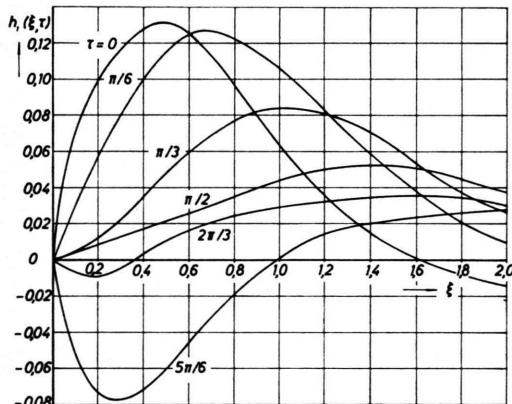


Abb. 1. Graphische Darstellung des Korrekturgliedes  $h_1(\xi, \tau)$  der ersten Näherung für  $\tau$ -Werte im Abstand  $\pi/6$ . Für die nächsten  $\tau$ -Werte im Abstand  $\pi/6$  verlaufen die Kurven in gleicher Reihenfolge spiegelsymmetrisch zur  $\xi$ -Achse.

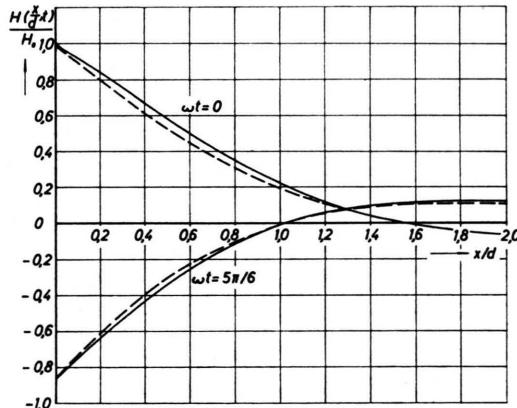


Abb. 2. Graphische Darstellung der reduzierten magnetischen Feldstärke in erster Näherung  $H(x/d, t)/H_0 = h_0(x/d, t) + \beta h_1(x/d, t)$  für zwei verschiedene  $t$ -Werte; Parameter  $\beta = 0,4$ . Die gestrichelten Kurven geben jeweils das Magnetfeld ohne Berücksichtigung der magnetischen Widerstandsänderung wieder.

#### 4. Berechnung der elektrischen Feldstärke

Aus Gl. (9) ergibt sich für die  $y$ -Komponente der elektrischen Feldstärke

$$E_y = - \frac{1}{\sigma(H_z)} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (35)$$

Unter Berücksichtigung von (6), (12) bis (15) sowie (17) geht dieser Ausdruck über in

$$E_y = - \frac{H_0}{\sigma_0 d} [1 + \beta h^2] \frac{\partial h}{\partial \xi}. \quad (36)$$

Setzt man hier (19) ein und geht insgesamt – wie bei der bisherigen Berechnung von  $h$  – bis zu Glie-  
dern 2. Ordnung in  $\beta$ , so erhält man für die elektrische Feldstärke in 2. Näherung

$$E_y^{(2)} = -\frac{H_0}{\sigma_0 d} \left[ \frac{\partial h_0}{\partial \xi} + \beta \left( h_0^2 \frac{\partial h_0}{\partial \xi} + \frac{\partial h_1}{\partial \xi} \right) + \beta^2 \left( 2 h_0 h_1 \frac{\partial h_0}{\partial \xi} + h_0^2 \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right) \right]. \quad (37)$$

Für spätere Rechnungen ist es zweckmäßig, diese Gleichung in der Form

$$E_y^{(2)} = -\frac{H_0}{\sigma_0 d} \operatorname{Re} \{ \mathbf{e}_{2,1}(\xi) e^{j\tau} + \mathbf{e}_{2,3}(\xi) e^{3j\tau} + \mathbf{e}_{2,5}(\xi) e^{5j\tau} \} \quad (38)$$

zu schreiben. Für die Phasorgrößen ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{2,1}(\xi) &= \frac{dh_0}{d\xi} + \beta \left[ \frac{1}{4} \left( 2 |h_0|^2 \frac{dh_0}{d\xi} + h_0^2 \frac{dh_1}{d\xi} \right) + \frac{dh_{1,1}}{d\xi} \right] \\ &+ \beta^2 \left[ \frac{1}{2} \left( (h_0 h_{1,1}^* + h_0^* h_{1,1}) \frac{dh_0}{d\xi} + (h_0 h_{1,1} + h_0^* h_{1,3}) \frac{dh_1}{d\xi} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \left( h_0^2 \frac{dh_{1,1}}{d\xi} + 2 |h_0|^2 \frac{dh_{1,1}}{d\xi} + h_0^2 \frac{dh_{1,3}}{d\xi} \right) + \frac{dh_{2,1}}{d\xi} \right], \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{2,3}(\xi) &= \beta \left[ \frac{1}{4} h_0^2 \frac{dh_0}{d\xi} + \frac{dh_{1,3}}{d\xi} \right] + \beta^2 \left[ \frac{1}{2} (h_0 h_{1,1} + h_0^* h_{1,3}) \frac{dh_0}{d\xi} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} h_0 h_{1,3} \frac{dh_0}{d\xi} + \frac{1}{4} \left( 2 |h_0|^2 \frac{dh_{1,3}}{d\xi} + h_0^2 \frac{dh_{1,1}}{d\xi} \right) + \frac{dh_{2,3}}{d\xi} \right], \end{aligned} \quad (40)$$

$$\mathbf{e}_{2,5}(\xi) = \beta^2 \left[ \frac{1}{2} h_0 h_{1,3} \frac{dh_0}{d\xi} + \frac{1}{4} h_0^2 \frac{dh_{1,3}}{d\xi} + \frac{dh_{2,5}}{d\xi} \right]. \quad (41)$$

## 5. Berechnung der Jouleschen Wärme

Die im leitenden Halbraum entwickelte JOULESche Wärme erfassen wir durch Berechnung der durch die Grenzfläche  $x=0$  eingestrahlten Leistung. Der POYNTING-Vektor hat bei der gewählten Anordnung nur die  $x$ -Komponente

$$S_x = E_y H_z. \quad (42)$$

Beachtet man, daß das Magnetfeld in der Grenzfläche  $x=0$  gegeben ist durch

$$H_z(0, \tau) = H_0 \cos \tau = \frac{1}{2} H_0 [e^{j\tau} + e^{-j\tau}]$$

und wählt man für  $E_y$  die (vollständige) Schreibweise von Gl. (38), so erhält man für die  $x$ -Komponente des POYNTING-Vektors

$$\begin{aligned} S_x(0, \tau) &= -\frac{1}{4} \frac{H_0^2}{\sigma_0 d} [\mathbf{e}_{2,5}(0) e^{5j\tau} + \mathbf{e}_{2,3}(0) e^{3j\tau} + \mathbf{e}_{2,1}(0) e^{j\tau} + \mathbf{e}_{2,1}^*(0) e^{-j\tau} \\ &+ \mathbf{e}_{2,3}^*(0) e^{-3j\tau} + \mathbf{e}_{2,5}^*(0) e^{-5j\tau}] \cdot [e^{j\tau} + e^{-j\tau}] \\ &= -\frac{1}{4} \frac{H_0^2}{\sigma_0 d} [\mathbf{e}_{2,5}(0) e^{6j\tau} + (\mathbf{e}_{2,3}(0) + \mathbf{e}_{2,5}(0)) e^{4j\tau} \\ &+ (\mathbf{e}_{2,1}(0) + \mathbf{e}_{2,3}(0)) e^{2j\tau} + (\mathbf{e}_{2,1}(0) + \mathbf{e}_{2,1}^*(0)) + (\mathbf{e}_{2,1}^*(0) + \mathbf{e}_{2,3}^*(0)) e^{-2j\tau} \\ &+ (\mathbf{e}_{2,3}^*(0) + \mathbf{e}_{2,5}^*(0)) e^{-4j\tau} + \mathbf{e}_{2,5}^*(0) e^{-6j\tau}]. \end{aligned}$$

Der zeitliche Mittelwerte dieser Größe ist

$$\bar{S}_x(0) = -\frac{1}{4} \frac{H_0^2}{\sigma_0 d} [\mathbf{e}_{2,1}(0) + \mathbf{e}_{2,1}^*(0)]. \quad (43)$$

Durch Einsetzen von (39) sowie der Ausdrücke (25), (27) und (28) bzw. deren Ableitungen an der Stelle  $\xi=0$  erhält man nach einfacher, aber et-

was langwieriger Rechnung

$$\begin{aligned} \bar{S}_x(0) &= \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{\sigma_0 d} \left[ 1 + \frac{1}{5} \beta - \frac{163+125\sqrt{3}}{20800} \beta^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{\sigma_0 d} [1 + 0,2 \beta - 0,0183 \beta^2]. \end{aligned} \quad (44)$$

Wir betrachten nun als Ausschnitt aus dem leitenden Halbraum einen in  $x$ -Richtung unendlich langen Zy-

linder, dessen Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten  $l$  (in  $y$ -Richtung) und  $B$  (in  $z$ -Richtung) ist. Für den zeitlichen Mittelwert der in diesem Volumen entwickelten Jouleschen Wärme erhalten wir nach (44)

$$R \bar{I}^2 = l B \bar{S}_x(0) \\ = l B \cdot \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{\sigma_0 d} [1 + 0,2 \beta - 0,0183 \beta^2]. \quad (45)$$

Für die Stromstärke des in diesem Volumen fließenden Stromes ergibt sich aus dem Durchflutungsgesetz

$$I = B H_0 \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t).$$

Dann ist

$$\bar{I}^2 = \frac{1}{2} B^2 H_0^2 = \frac{1}{2} I_0^2$$

$$\text{bzw. } H_0^2 = 2(\bar{I}^2/B^2).$$

Nach Einsetzen dieses Ausdrückes in (45) sowie Kürzen des Faktors  $\bar{I}^2$  folgt dann für den Wechselstromwiderstand des Zylinders

$$R = \frac{l}{\sigma_0 d B} [1 + 0,2 \beta - 0,0183 \beta^2].$$

Wir führen nun auch in dem Ausdruck  $\beta = b H_0^2$  an Stelle der Amplitude der magnetischen Feldstärke die Amplitude der Stromstärke ein und erhalten dann schließlich

$$R(\omega) = \frac{l}{\sigma_0 d(\omega) B} [1 + 0,2 b (I_0/B)^2 \\ - 0,0183 b^2 (I_0/B)^4]. \quad (46)$$

Die magnetische Widerstandsänderung bewirkt also

$$h_{1,1}(\xi) = \frac{1}{2} A |A|^2 \left[ \frac{11-2j}{10} \sinh(1+3j) \xi - \frac{11+2j}{10} \sinh(3+j) \xi + \sinh(1-j) \xi - C_{1,1} \sinh(1+j) \xi \right] \quad (52)$$

$$\text{mit } C_{1,1} = \frac{(11-2j) \sinh(1+3j) \Delta - (11+2j) \sinh(3+j) \Delta + 10 \sinh(1-j) \Delta}{10 \sinh(1+j) \Delta} \quad (53)$$

$$\text{und } h_{1,3}(\xi) = -\frac{1}{4} A^3 [\sinh 3(1+j) \xi + \sinh(1+j) \xi - C_{1,3} \sinh \sqrt{3}(1+j) \xi] \quad (54)$$

$$\text{mit } C_{1,3} = \frac{\sinh 3(1+j) \Delta + \sinh(1+j) \Delta}{\sinh \sqrt{3}(1+j) \Delta}. \quad (55)$$

Diese Lösungen erfüllen die Randbedingungen

$$h_0(\pm \Delta) = \pm 1, \quad h_{1,1}(\pm \Delta) = h_{1,3}(\pm \Delta) = 0.$$

Für die  $y$ -Komponente der elektrischen Feldstärke in 1. Näherung gilt nach (37)

$$E_y^{(1)} = -\frac{H_0}{\sigma_0 d} \left[ \frac{\partial h_0}{\partial \xi} + \beta \left( h_0^2 \frac{\partial h_0}{\partial \xi} + \frac{\partial h_1}{\partial \xi} \right) \right]. \quad (56)$$

Wir schreiben sie in der Form

$$E_y^{(1)} = -\frac{H_0}{\sigma_0 d} \operatorname{Re} \{ \mathbf{e}_{1,1}(\xi) e^{j\tau} + \mathbf{e}_{1,3}(\xi) e^{3j\tau} \}. \quad (57)$$

Dann ist

$$\mathbf{e}_{1,1}(\xi) = \frac{dh_0}{d\xi} + \beta \left[ \frac{1}{4} \left( 2 |h_0|^2 \frac{dh_0}{d\xi} + h_0^2 \frac{dh_0^*}{d\xi} \right) + \frac{dh_{1,1}}{d\xi} \right] \quad (58)$$

eine stromstärkeabhängige Vergrößerung des Wechselstromwiderstandes.

## 6. Das elektromagnetische Feld in einer ebenen, unendlich ausgedehnten Leiterschicht

Wie schon in der Einleitung erwähnt, kann man die entsprechenden Berechnungen auch für eine ebene Leiterschicht konstanter Dicke durchführen. Wir betrachten hier die folgende Anordnung: Das Raumgebiet zwischen den Ebenen  $x = -\delta$  und  $x = +\delta$  besteht aus einem Material, dessen Leitfähigkeit durch (6) gegeben ist. Diese Leiterschicht liege in einem Magnetfeld, das die folgenden Randwerte annimmt:

$$H_z(x = -\delta, t) = -H_0 \cdot \cos(\omega t) \\ \text{und } H_z(x = \delta, t) = H_0 \cdot \cos(\omega t). \quad (47)$$

Zu lösen ist also die Dgl. (11) mit der Randbedingung (47) oder, unter Beachtung von (12) bis (15), die Dgl. (16) mit der Randbedingung

$$h(-\Delta, \tau) = -\cos \tau \quad \text{und} \quad h(\Delta, \tau) = \cos \tau, \quad (48)$$

wobei  $\Delta = \delta/d$  gesetzt wurde. (49)

Die Lösung von (16) verläuft formal wie in Nr. 2 und Nr. 3. Daher seien hier nur die Ergebnisse bis zur ersten Näherung einschließlich angegeben:

$$h_0(\xi) = 2 A \sinh(1+j) \xi \quad (50)$$

$$\text{mit } A = \frac{\sinh(1-j) \Delta}{\cosh(2\Delta) - \cos(2\Delta)} \quad (51)$$

und

$$\mathbf{e}_{1,3}(\xi) = \beta \left[ \frac{1}{4} \mathbf{h}_0^2 \frac{d\mathbf{h}_0}{d\xi} + \frac{d\mathbf{h}_{1,3}}{d\xi} \right]. \quad [\text{Siehe Gl. (38) bis (40)!}] \quad (59)$$

## 7. Die Joulesche Wärme und der Wechselstromwiderstand eines Leiterbandes

Zur Berechnung der in der leitenden Schicht entwickelten Jouleschen Wärme betrachten wir wieder die durch die Grenzflächen eingestrahlte Leistung. Für den Poynting-Vektor gilt wieder Gl. (42). Die magnetische Feldstärke in den Grenzflächen ist gegeben durch

$$H_z(\pm A, \tau) = \pm H_0 \cos \tau = \pm \frac{1}{2} H_0 [e^{i\tau} + e^{-i\tau}].$$

Mit (57) sowie unter Beachtung der Tatsache, daß  $E_y$  eine gerade Funktion in  $\xi$  ist, ergibt sich dann für  $S_x$ :

$$\begin{aligned} S_x(\pm A, \tau) &= \mp \frac{1}{4} \frac{H_0^2}{\sigma_0 d} [\mathbf{e}_{1,3} e^{3i\tau} + \mathbf{e}_{1,1} e^{i\tau} + \mathbf{e}_{1,1}^* e^{-i\tau} + \mathbf{e}_{1,3}^* e^{-3i\tau}] [e^{i\tau} + e^{-i\tau}] \\ &= \mp \frac{1}{4} \frac{H_0^2}{\sigma_0 d} [\mathbf{e}_{1,3} e^{4i\tau} + (\mathbf{e}_{1,3} + \mathbf{e}_{1,1}) e^{2i\tau} + (\mathbf{e}_{1,1} + \mathbf{e}_{1,1}^*) + (\mathbf{e}_{1,1}^* + \mathbf{e}_{1,3}^*) e^{-2i\tau} + \mathbf{e}_{1,3}^* e^{-4i\tau}]. \end{aligned}$$

Der zeitliche Mittelwert dieser Größe ist  $\bar{S}_x(\pm A) = \mp \frac{1}{4} \frac{H_0^2}{\sigma_0 d} [\mathbf{e}_{1,1} + \mathbf{e}_{1,1}^*]$ . (60)

(In den letzten drei Gleichungen ist natürlich jeweils unter  $\mathbf{e}_{1,i}$  der Wert  $\mathbf{e}_{1,i}(A)$  zu verstehen.)

Wir betrachten nun einen quaderförmigen Ausschnitt der Leiterschicht mit der Länge  $l$  (in  $y$ -Richtung gemessen) und der Breite  $B$  (in  $z$ -Richtung gemessen). Der zeitliche Mittelwert der in diesem Volumen entwickelten Jouleschen Wärme ist

$$R \bar{I}^2 = 2 l B \bar{S}_x(-A) = \frac{1}{2} l B \frac{H_0^2}{\sigma_0 d} [\mathbf{e}_{1,1} + \mathbf{e}_{1,1}^*]. \quad (61)$$

Aus dem Durchflutungsgesetz folgt für die Stromstärke des in dem Volumen fließenden Stromes

$$I = 2 B H_0 \cos \tau = I_0 \cos \tau.$$

Dann ist

$$\bar{I}^2 = 2 B^2 H_0^2 = \frac{1}{2} I_0^2 \quad \text{bzw.} \quad H_0^2 = \bar{I}^2 / 2 B^2,$$

und aus (61) folgt für den Wechselstromwiderstand des betrachteten Volumens

$$R = \frac{l}{4 \sigma_0 d B} [\mathbf{e}_{1,1} + \mathbf{e}_{1,1}^*]. \quad (62)$$

Hier ist nun (58), und in den so entstehenden Ausdruck sind die Formeln (50) bis (54) einzusetzen. Die etwas langwierige Rechnung liefert schließlich

$$R = \frac{l}{2 \sigma_0 d B} \frac{\sinh(2A) + \sin(2A)}{\cosh(2A) - \cos(2A)} \left\{ 1 + 0,1 \beta \left[ 2 + 3 \frac{\sinh(2A) \sin(2A) (\sinh(2A) - \sin(2A))}{(\cosh(2A) - \cos(2A))^2 (\sinh(2A) + \sin(2A))} \right] \right\}. \quad (63)$$

Im Grenzfall schwachen Skin-Effektes, d. h.  $A \ll 1$ , erhält man durch Reihenentwicklung

$$R \approx \frac{l}{\sigma_0 2 \delta B} [1 + 0,25 \beta], \quad (64)$$

bzw., wenn wir hier in dem Ausdruck  $\beta = b H_0^2$  an Stelle der magnetischen Feldstärke die Amplitude  $I_0$  der Stromstärke einführen,

$$R \approx \frac{l}{\sigma_0 2 \delta B} [1 + 0,0625 b (I_0/B)^2]. \quad (65)$$

### Schlußbemerkung

Das hier verwendete Approximationsverfahren läßt sich prinzipiell beliebig fortsetzen. Die Ergebnisse zeigen jedoch, daß man im Rahmen des Gültigkeitsbereichs des Verfahrens ( $\beta \ll 1$ ) mit der ersten Näherung auskommt.

Der Approximationsansatz (19) läßt sich zwar auch für andere geometrische Anordnungen – man

denke etwa an einen kreiszylindrischen Leiter — durchführen. Die Differentialgleichungen des dem System (20) entsprechenden Systems sind jedoch nicht in einfacher Weise lösbar.

Der Problemkreis der vorliegenden Arbeit wurde im Rahmen einiger Studienarbeiten<sup>2-4</sup> am Institut für Elektrophysik der Technischen Hochschule Braunschweig behandelt. Herrn Prof. Dr. G. LAUTZ danke ich für sein Interesse und für die Förderung, die er dieser Arbeit zuteil werden ließ, sowie für die Durchsicht des Manuskriptes.

<sup>2</sup> R. BREDO, Berechnung des elektromagnetischen Feldes in einem leitenden Halbraum unter Berücksichtigung der magnetischen Widerstandsänderung, Studienarbeit, Braunschweig 1965.

<sup>3</sup> D. ELZE, Der Skin-Effekt in einem Leiterband unter Berücksichtigung der magnetischen Widerstandsänderung, Studienarbeit, Braunschweig 1966.

<sup>4</sup> G. EWERDWALESLOH, Numerische Berechnungen zum Skin-Effekt unter Berücksichtigung der magnetischen Widerstandsänderung, Studienarbeit, Braunschweig 1966.

## Quantenresonanzen der Ultraschallverstärkung in Wismut

K. WALTHER

Philips Zentraleinrichtung GmbH, Laboratorium Hamburg, Hamburg-Stellingen

(Z. Naturforsch. 21 a, 1443—1462 [1966]; eingegangen am 30. April 1966)

Build-up of ultrasonic noise and ultrasonic amplification in a bismuth sample subjected simultaneously to an electric and a magnetic field are investigated. The ultrasonic noise is generated in the direction of carrier drift. Under conditions of ultrasonic amplification the quantum resonances of the magneto-acoustic attenuation in Bi are "inverted", i. e. maxima of attenuation are converted into minima by the application of a suitable electric field. Estimated values of the de-attenuation caused by the electric drift field range around 100 db/cm, the gain referred to the attenuation at zero magnetic field being 22 db/cm for shear waves at 265 Mc/s. Optimum signal amplification corresponds to a minimum of generated ultrasonic noise.

Seit einer grundlegenden Arbeit von WEINREICH<sup>1</sup> hat das Gebiet der „akusto-dynamischen“ Effekte in Halbleitern und Halbmetallen zunehmende Bedeutung erlangt. Man versteht hierunter die Wechselwirkungen zwischen bewegten Ladungsträgern und Ultraschallwellen in Festkörpern. Insbesondere interessiert hierbei der Fall, daß die Driftgeschwindigkeit  $v_d$  der Ladungsträger vergleichbar mit oder größer als die Schallgeschwindigkeit  $v_s$  ist. Die Wechselwirkung kann entweder piezoelektrischer Art sein, wie z. B. beim CdS, oder sie wird bei Halbleitern (z. B. Germanium) und Halbmetallen (z. B. Wismut) vorwiegend durch das Deformationspotential beschrieben.

Überschreitet die Driftgeschwindigkeit in Schallausbreitungsrichtung die Schallgeschwindigkeit, so tritt eine Ultraschallverstärkung auf, d. h. die Schallwelle gewinnt Energie durch die Trägerdriftbewegung. In der klassischen Vorstellungswise läßt sich dieser Vorgang beschreiben<sup>2</sup>, indem man die Mitführung der Ladungsträger durch die mit der Schall-

welle verknüpften elektrischen Feldkräfte berechnet („wave-particle-drag“). Eine mehr quantentheoretische Betrachtungsweise<sup>3</sup> führt die Ultraschallverstärkung auf eine stimulierte Emission von Phononen infolge der Verschiebung der Elektronenverteilungsfunktion durch die Driftbewegung zurück („phononmaser“). Sind die Bedingungen für Ultraschallverstärkung erfüllt, so ist eine Selbstanfachung von Ultraschallrauschen durch die Driftbewegung ohne Anwesenheit eines von außen zugeführten Ultraschallsignals möglich.

In engem Zusammenhang mit der Ultraschallverstärkung stehen der akusto-elektrische Effekt und der „Kink“-Effekt. Unter dem akusto-elektrischen Effekt versteht man das Auftreten eines Gleichstromes bzw. einer Gleichspannung an den Enden eines Kristalls, wenn dieser von einer Ultraschallwelle durchlaufen wird. Die von der Schallwelle mitgeführte Ladungsträgerkonzentration bewirkt einen Gleichstromanteil proportional dem Amplitudenquadrat der Welle. Mit „Kink“-Effekt bezeichnet man

<sup>1</sup> G. WEINREICH, Phys. Rev. 104, 321 [1956].

<sup>2</sup> D. L. WHITE, J. Appl. Phys. 33, 2547 [1962].

<sup>3</sup> A. B. PIPPARD, Phil. Mag. 8, 161 [1963].